Enseigner la résolution de problèmes (arithmétiques)

Quels problèmes ?

Combien ?

Pourquoi ?

Comment l'enseigner ?

Karine Vieque
Conseillère Pédagogique Départementale en Mathématiques (62)

Circonscription de Boulogne 2

La résolution de problèmes (arithmétiques)

Quelles sont
les préconisations ?

Comment se développe la
mémoire des problèmes ?

Apprendre à se représenter un problème,
quels gestes professionnels ?

Apprendre à mettre en relation les
nombres,
un autre enjeu ?

La résolution de problèmes (arithmétiques)

Quelles sont
les préconisations ?

Comment se développe la
mémoire des problèmes ?

Apprendre à se représenter un problème,
quels gestes professionnels ?

Apprendre à mettre en relation
les nombres, un autre enjeu à
viser

Connaitre les préconisations

De quels problèmes parle-t-on ?

Mise en activité :

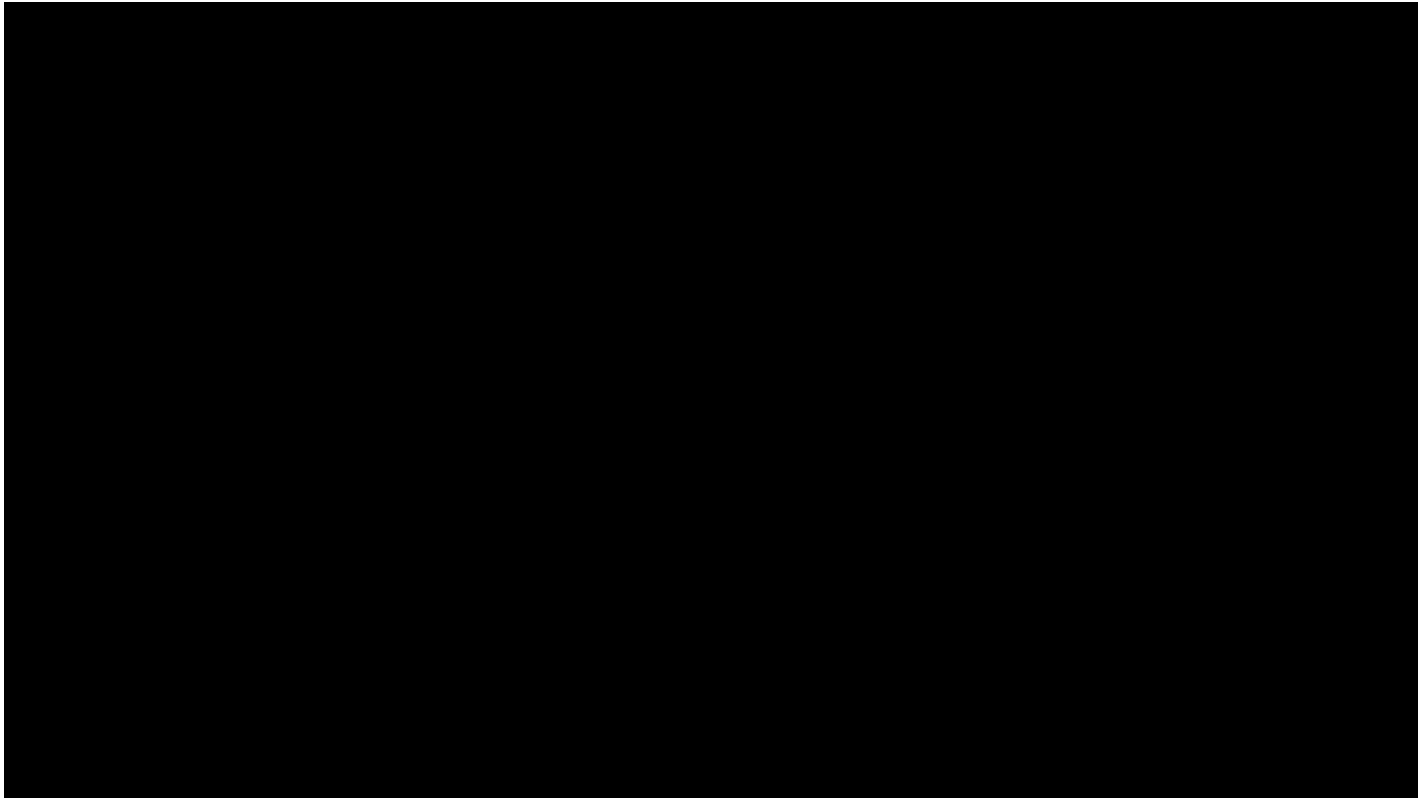
Q1: Les élèves ont le plus de difficultés à :

A: résoudre des problèmes simples

B: résoudre des problèmes complexes

Sondage

De quels problèmes parle-t-on ? Problèmes simples ou complexes ?



Mise en activité :

Q2: Combien de problèmes proposez vous aux élèves par semaine ?

3 ?   5 ?   10 ?

Combien de problèmes par semaine ?

- **10 problèmes** par semaine

Connaitre les préconisations

Mise en activité :

Q3: Pourquoi 10 problèmes par semaine ?

Quelle hypothèse proposez-vous ? (

Question ouverte – 1 proposition

Pourquoi 10 problèmes par semaine ?

- **Enjeux :**
  - ✓ Construire une **mémoire** de **problèmes variés**,
  - ✓ **Comprendre comment** se résout chaque **variété de problème**,
  - ✓ **Comprendre pourquoi** il se résout de telle manière, en lien avec le **sens des opérations**.

Objectifs attendus :

Etre capable de **faire des ANALOGIES entre problèmes de base, de même structure**, c'est-à-dire construits sur le même modèle mathématique, afin de les résoudre.

Objectifs attendus :

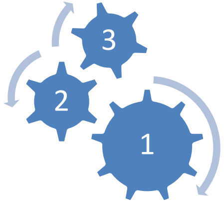
Etre capable de **faire des ANALOGIES entre problèmes de base, de même structure**, c'est-à-dire construits sur le même modèle mathématique, afin de les résoudre.

Automatiser la résolution de **problèmes de base**.

Objectifs attendus :

Etre capable de **faire des ANALOGIES entre problèmes de base, de même structure**, c'est-à-dire construits sur le même modèle mathématique, afin de les résoudre.

Automatiser la résolution de **problèmes de base**.



Etre capable de résoudre seul des problèmes à une, deux ou trois étapes : c'est-à-dire **identifier seul les problèmes de base à résoudre pour cheminer vers la résolution globale du problème**.

Que veut dire faire des analogies ?

Faire une analogie,

- c'est identifier des **similitudes** entre deux problèmes

- c'est mettre en relation la **STRUCTURE du problème** avec celle d'un **problème de base mémorisé**, dit **problème de référence**, en lien avec le **sens des opérations**

Que savons-nous du

« Comment réussit-on à résoudre un problème ? »

Point de vue de psychologie cognitive…

Il s'agit à chaque fois de calculer le nombre de tulipes dans un massif.

Comment réussit-on ces problèmes ?

A: Un massif de fleurs, formé de 60 tulipes rouges et 15 tulipes jaunes

B: Un massif de 60 rangées de 15 tulipes

C: un massif de 60 fleurs, formé de tulipes et de 15 jonquilles

D: 60 tulipes disposées en 15 massifs réguliers

* Extraits des travaux de Catherine Houdement

Des exemples pour réfléchir…

Il s'agit à chaque fois de calculer le nombre de tulipes dans un massif.

Comment réussit-on ces problèmes ?

Charles a récolté 108 kg de châtaignes. Il les met dans trois paniers, un petit, un moyen, un grand. Les châtaignes du panier moyen pèsent le double de celles du petit panier. Les châtaignes du grand panier pèsent le double de celles du panier moyen. Après avoir rempli ces trois paniers, il lui reste quelques kg de châtaignes, exactement la moitié du poids des châtaignes du grand panier.

Combien de kg de châtaignes Charles a-t-il mis dans chaque panier ? Combien de kg lui reste-t-il ?

* Extraits des travaux de Catherine Houdement

Des exemples pour réfléchir…

Plusieurs problèmes simples à identifier pour cheminer vers la résolution du problème
Aussi: des procédures qui mobilisent la connaissance des doubles et des moitiés.

*Charles a récolté 108 kg de châtaignes. **Il les met dans trois paniers**, un petit, un moyen, un grand. Les châtaignes du panier moyen pèsent le **double** de celles du petit panier. Les châtaignes du grand panier pèsent le **double** de celles du panier moyen. Après avoir rempli ces trois paniers, il lui reste quelques kg de châtaignes, exactement la **moitié** du poids des châtaignes du grand panier.*

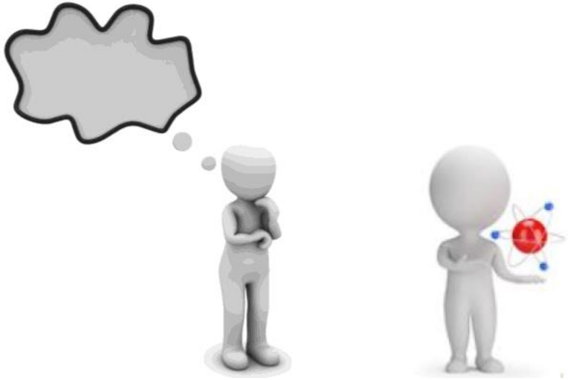
Combien de kg de châtaignes Charles a-t-il mis dans chaque panier ? Combien de kg lui reste-t-il ?

* Extraits des travaux de Catherine Houdement

Les apports de Jean Julo, psychologue cognitiviste

Que retenir ?

« *Comprendre quelque chose serait,*
d'une manière ou d'une autre,
*construire une **re**présentation de cette chose.* »



*Selon Julo (1995, p.11),

Les apports de Jean Julo, psychologue cognitiviste

Jean Julo 2002 *Grand N* n°69

Que retenir ?

Deux processus cognitifs en jeu

Processus représentationnels

Le sujet **construit une représentation cognitive** (mentale) du problème.

Le problème peut lui évoquer un problème autre, déjà résolu.

Les apports de Jean Julo, psychologue cognitiviste

Jean Julo 2002 *Grand N* n°69

Que retenir ?

Deux processus cognitifs en jeu

Processus représentationnels

Le sujet **construit une représentation cognitive** (mentale) du problème.

Le problème peut lui évoquer un problème autre, déjà résolu.

Processus opératoires

Le sujet **déclenche un traitement**

S'il a reconnu d'une certaine façon le problème :
nous et les massifs de fleurs

ce **traitement** peut être **inféré de sa mémoire**

S'il ne reconnait pas le problème ,
il lui faut **construire une nouvelle stratégie** :
le *problème des châtaignes en cycle 3*

Les apports de Jean Julo, psychologue cognitiviste

Jean Julo 2002 *Grand N* n°69

Que retenir ?

Deux processus cognitifs en jeu

Processus représentationnels

Le sujet **construit une représentation cognitive** (mentale) du problème.

Le problème peut lui évoquer un problème autre, déjà résolu.

Processus opératoires

Le sujet **déclenche un traitement**

<u>**S'il a reconnu**</u> d'une certaine façon le problème :
nous et les massifs de fleurs

ce **traitement** peut être **inféré de sa mémoire**

<u>**S'il ne reconnait pas**</u> le problème ,
il lui faut **construire une nouvelle stratégie** :
le *problème des châtaignes en cycle 3*

Ces processus sont **simultanés**, ils interagissent !
C'est **l'interaction de ces processus qui fait réussir la résolution**.

Que retenir ?

La représentation d'un problème que se construit un élève, oscille entre deux « possibilités extrêmes »

1-Ce problème ressemble à un problème connu.

Traitement inféré de mémoire

Les massifs de fleurs

Que retenir ?

La représentation d'un problème que se construit un élève, oscille entre deux « possibilités extrêmes »

1-Ce problème ressemble à un problème connu.	2-Ce problème ne rappelle rien à l'élève.
Traitement inféré de mémoire	Construction d'une stratégie nouvelle
Les massifs de fleurs	Les châtaignes pour les élèves de CM

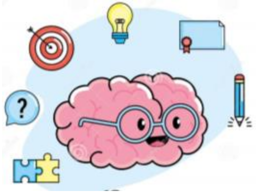
Que retenir ?

La représentation d'un problème que se construit un élève, oscille entre deux « possibilités extrêmes »

1-Ce problème ressemble à un problème connu.	2-Ce problème ne rappelle rien à l'élève.
Traitement inféré de mémoire	Construction d'une stratégie nouvelle
Les massifs de fleurs	Les châtaignes pour les élèves de CM

Reconnaître un problème est lié à:

- la représentation évolutive que l'élève s'en fait
- à sa mémoire des problèmes



La résolution de problèmes (arithmétiques)

Quelles sont
les préconisations ?

Comment se développe la
mémoire des problèmes ?

Apprendre à se représenter un problème,
quels gestes professionnels ?

Apprendre à mettre en relation
les nombres, un autre enjeu à
viser

Conséquence sur les enjeux de l'enseignement des problèmes

Enrichir la mémoire des élèves sur les problèmes

<u>Vers les élèves:</u>
Donner l'occasion aux élèves de résoudre des problèmes et de les **réussir seuls**

<u>Vers les enseignants/vers les programmes:</u>
Définir les types de problèmes dont on attend qu'ils soient **résolus « automatiquement »** par les élèves

Mais quels problèmes ??

Travaux de Catherine Houdement

Mon hypothèse pour problèmes à mémoriser :

→ceux qui sont les « éléments simples » des autres problèmes, relativement à un champ notionnel.

Que j'appellerai les problèmes « basiques »

Par exemple en arithmétique les problèmes liés à une opération :

2 données trouver la 3ème

(*2n*+1 données pour la proportionnalité),

sans information superflue ,

avec syntaxe simple

« *one step problems* »

Il en existe assez peu de ce type dans les manuels, mais surtout leur organisation n'est pas pensée

→ Outils théoriques qui les organisent : Vergnaud 1985, 1997

structures additives (champ conceptuel addition-soustraction)

ET structures multiplicatives (champ conceptuel multiplication-division -proportionnalité)

un outil crucial pour les problèmes arithmétiques

C.Houdement pour ESEN 25/09/2017 15

Travaux de Catherine Houdement

Mon hypothèse pour problèmes à mémoriser :

→ceux qui sont les « éléments simples » des autres problèmes, relativement à un champ notionnel.

Que j'appellerai les problèmes « basiques »

Par exemple en arithmétique les problèmes liés à une opération :

2 données trouver la 3ème

($2n$+1 données pour la proportionnalité),

sans information superflue ,

avec syntaxe simple

« *one step problems* »

Il en existe assez peu de ce type dans les manuels, mais surtout leur organisation n'est pas pensée

→ Outils théoriques qui les organisent : Vergnaud 1985, 1997

structures additives (champ conceptuel addition-soustraction)

ET structures multiplicatives (champ conceptuel multiplication-division -proportionnalité)

un outil crucial pour les problèmes arithmétiques

Problèmes basiques

Problèmes liés à **une** opération

Savoir reconnaitre des **relations de base**

Configurations (conditions)

2 données trouver la 3e

Règles d'action

Travaux de Catherine Houdement

Au cinéma 'Royal Ciné' un adulte paye 6€ par séance et un enfant paye 4€ par séance.

A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants.

A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants.

La recette de la journée est 542€

Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

J'appelle « **problème complexe** » un tel problème qui est

- un composé de problèmes basiques « cachés »….
- …. à construire par l'élève !

Sous problèmes calculables	Sous problèmes utiles
Séance du soir : nombre de personnes Séance du soir : prix que payent les adultes Séance du soir : prix que payent les enfants Séance de l'après midi : prix que payent les adultes Deux séances : prix que payent les adultes	Recette de la séance du soir OU Recette venant des adultes ET Séance du soir : prix que payent les enfants

Vers une typologie des problèmes arithmétiques

- Problèmes « basiques » (d'un savoir, d'un concept)

Enjeu élève : les mémoriser

- Problèmes « complexes »

Enjeu élève : construire des sous-problèmes basiques calculables en connectant des informations et qualifiant les résultats

- Problèmes a-typiques……

Enjeu élève : inventivité stratégique et flexibilité de raisonnement , persévérance et confiance en soi

Typologie Vergnaud (1997; 2001) connue mais à mieux utiliser :

structures additives et structures multiplicatives

- Elle répond à la question du sens des opérations !
- **Les sens de l'addition-soustraction** sont portés par les types de problèmes (composition d'états, transformation d'états, comparaison additive d'états, composition de transformations..) associés à la place de l'inconnue
- **Les sens multiplicatifs** :
  - multiplication, division partition, division- quotition, proportionnalité, qui sont les quatre types de proportionnalité simple,
  - proportionnalité simple composée,
  - proportionnalité multiple (aire, volume ...)

Vergnaud (dir, 1997) *Le Moniteur de Mathématiques, cycle 3, Résolution de problème*. Fichier Pédagogique. Nathan

CONCLUSION

- Les problèmes « basiques » d'un concept sont des connaissances de base. Il est urgent de restaurer un enseignement de ces problèmes et donc de faire fréquenter (et réussir) par les élèves une grande variété de tels problèmes, puis d'analyser avec les élèves leurs ressemblances
- Les problèmes « complexes » sont **des composés** de problèmes basiques. Ils nécessitent de savoir résoudre les problèmes basiques sous-jacents et des connaissances supplémentaires : connecter les informations pour construire le (les) sous –problème basique calculable, savoir qualifier… un
- Les problèmes « a-typiques » visent l'inventivité stratégique et la prise de risque ……
- UN ENJEU FORT pour les enseignants :
  analyser les problèmes

C.Houdement pour ESEN 25/09/2017 37

Liens entre les travaux de Catherine Houdement et de Gérard Vergnaud

C. Houdement

Problèmes basiques

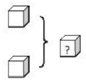
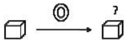
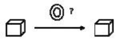
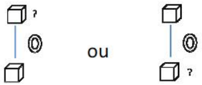
Problèmes complexes
= composés de plusieurs problèmes basiques

G. Vergnaud

Typologie des problèmes de Vergnaud
Permettre de construire le SENS des opérations

Typologie des problèmes additifs et soustractifs de Gérard Vergnaud

G. Vergnaud

				Exemples
Composition de deux états On considère les situations qui portent sur 3 grandeurs où 2 d'entre elles se composent pour donner la 3ème.	**Recherche du composé**		**Problèmes ternaires**	***A midi, j'ai bu 2 verres d'eau et 1 verre de jus d'orange. Combien de verres ai-je bu en tout ?***
	Recherche d'1 partie			***Dans notre cour, nous avons 5 bancs. Pendant la récréation, 3 bancs sont occupés par des enfants. Combien de bancs sont vides?***
Transformation d'un état Un état initial subit une transformation pour aboutir à un état final.	**Recherche de l'état final**		**Problèmes ternaires**	***Tu avais 2 petites voitures. Je t'en donne encore une. Combien en as-tu maintenant?***
	Recherche de la transformation			***Pose 5 cubes sur la table. Que dois-tu faire pour en avoir 7?***
	Recherche de l'état initial			***J'ajoute 3 bonbons dans la boîte. Maintenant j'en ai 5. Combien la boîte contenait-elle déjà de bonbons?***
Comparaison d'états **On compare 2 états. Dans ce type de problème, on trouve presque toujours les expressions « de plus/de moins »**	**Recherche de l'un des états**		**Problèmes ternaires**	***Alexis a 3 ans. Il a 1 an de plus (ou de moins) que sa sœur. Quel est l'âge de sa sœur?***
	Recherche de la comparaison			***Sur une assiette, il y a 2 gâteaux. Sur une autre, il y en a 5. Combien y a-t-il de gâteaux de plus sur la 2ème assiette?***

Typologie des problèmes additifs et soustractifs de Gérard Vergnaud

Quels sont les expressions-clés à identifier dans chaque exemple donné ?

Exemples de réussite

Exemples de problèmes additifs à une étape

- M. Durand entre dans un magasin où il achète une paire de chaussures à 87,55 euros. Il sort du magasin avec 24,25 euros. Avec combien d'argent M. Durand est-il entré dans le magasin ? *(Recherche d'un état initial)*
- M. Durand a 125 euros en poche. Il entre dans un magasin et s'achète une paire de chaussures à 87,55 euros. Avec combien d'argent ressort-il du magasin ? *(Recherche d'un état final)*
- M. Durand entre dans un magasin avec 150 euros en poche. Il s'achète une paire de chaussures puis il ressort avec 75,20 euros. Combien d'argent a-t-il dépensé ? *(Recherche de la transformation entre l'état final et l'état initial)*

Typologie des problèmes multiplicatifs et de division Gérard Vergnaud

G. Vergnaud

Exemples de réussite

Exemples de problèmes additifs à une étape

- M. Durand entre dans un magasin où il achète une paire de chaussures à 87,55 euros. Il sort du magasin avec 24,25 euros. Avec combien d'argent M. Durand est-il entré dans le magasin ? *(Recherche d'un état initial)*
- M. Durand a 125 euros en poche. Il entre dans un magasin et s'achète une paire de chaussures à 87,55 euros. Avec combien d'argent ressort-il du magasin ? *(Recherche d'un état final)*
- M. Durand entre dans un magasin avec 150 euros en poche. Il s'achète une paire de chaussures puis il ressort avec 75,20 euros. Combien d'argent a-t-il dépensé ? *(Recherche de la transformation entre l'état final et l'état initial)*

Typologie des problèmes multiplicatifs et de division Gérard Vergnaud

G. Vergnaud

Problèmes de multiplication	**Configuration rectangulaire**	Ces problèmes mettent en jeu un produit de mesures et sont scolairement identifiés comme supports à la construction du concept de multiplication.	**Problèmes ternaires**	***Quel est le nombre de carreaux de chocolat que contient une tablette de 3 sur 4 ?***
	Multiplication	Ces problèmes relèvent de l'addition réitérée. On cherche le nombre total d'éléments		***Il y a 4 élèves. La maitresse distribue 3 jetons à chaque élève. Combien distribue-t-elle de jetons en tout?***

Typologie des problèmes multiplicatifs et de division Gérard Vergnaud

G. Vergnaud

Problèmes de division	**Division quotition**	On calcule le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection en connaissant la valeur d'un paquet.	**Problèmes quaternaires**	***La maitresse a 12 jetons. Elle les distribue à un groupe d'élèves. Chaque élève reçoit 3 jetons. Combien y a-t-il d'élèves ?***
	Division partition	On calcule la valeur d'un paquet connaissant le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection.		***La maitresse a 12 jetons. Elle les distribue à 4 élèves. Chaque élève a le même nombre de jetons. Combien de jetons a chaque élève ?***

Typologie des problèmes multiplicatifs et de division Gérard Vergnaud

G. Vergnaud

Exemples de problèmes multiplicatifs à une étape

- M. Durand s'achète 5 chemises à 35 euros chaque. Quel sera le montant de son achat ?

- Mme Dupont possède des poules qui pondent 157 œufs par jour. Elle répartit les œufs dans des boîtes de 6. Combien de boîtes pourra-t-elle remplir chaque jour ?

- Les poules de Mme Dupont ont pondu 156 œufs. Elle les range dans 13 boites.
  Combien d'œufs met-elle dans une boite ?

Typologie des problèmes multiplicatifs et de division Gérard Vergnaud

G. Vergnaud

Exemples de problèmes multiplicatifs à une étape

- M. Durand s'achète 5 chemises à 35 euros chaque. Quel sera le montant de son achat ?

- Mme Dupont possède des poules qui pondent 157 œufs par jour. Elle répartit les œufs dans des boîtes de 6. Combien de boîtes pourra-t-elle remplir chaque jour ?

- Les poules de Mme Dupont ont pondu 156 œufs. Elle les range dans 13 boites.
  Combien d'œufs met-elle dans une boite ?

Résoudre les deux derniers problèmes
Qu'est ce qui change dans la représentation de ces problèmes ?

Typologie des problèmes multiplicatifs et de division Gérard Vergnaud

G. Vergnaud

Exemples de problèmes multiplicatifs à une étape

- M. Durand s'achète 5 chemises à 35 euros chaque. Quel sera le montant de son achat ?

  Multiplication
  Addition itérée

- Mme Dupont possède des poules qui pondent 157 œufs par jour. Elle répartit les œufs dans des boîtes de 6. Combien de boîtes pourra-t-elle remplir chaque jour ?

  Division quotition
  On calcule le nombre de boites identiques que connaissant la valeur d'une boite

- Les poules de Mme Dupont ont pondu 156 œufs. Elle les range dans 13 boites.
  Combien d'œufs met-elle dans une boite ?

  Division partition
  On calcule la valeur d'une part, la valeur d'une boite,
  connaissant le nombre de boites identiques que l'on peut faire dans une collection

Comment enseigner la résolution de problèmes ?
Comment favoriser la mémorisation de problèmes de base ?

Houdement

Vergnaud

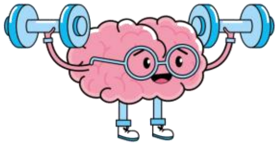
Quelle était l'intention de G. Vergnaud lorsqu'il a conçu sa typologie ?
Quels gestes professionnels mettre en œuvre ?

G. Vergnaud

« Le ***savoir*** *se forme à partir de* ***problèmes*** *à résoudre, c'est-à-dire de* ***situations à maitriser*** *[…] ,*

les ***conceptions*** *des élèves sont* ***façonnées par*** *les* ***situations*** *qu'ils ont rencontrées.*

Vergnaud



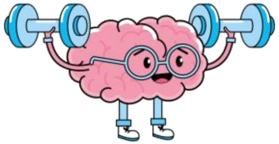
Adopter un autre regard sur le travail de Gérard Vergnaud pour mieux comprendre sa typologie, et mettre en œuvre les gestes professionnels associés

G. Vergnaud

*« Le **savoir** se forme à partir de **problèmes** à résoudre, c'est-à-dire de **situations à maitriser** […] ,*

*les **conceptions** des élèves sont **façonnées par** les **situations** qu'ils ont rencontrées.*

Vergnaud



- ***Enjeu :*** *Faire **varier les problèmes en utilisant la notion de variable didactique** de manière à faire acquérir une **variété des procédures** aux élèves*

***variété de problèmes** possibles*

SENS des opérations

Ce sont les schèmes qui s'adaptent


G. Vergnaud

Vergnaud définit un **schème** comme la **conduite invariante** d'un sujet dans une classe de situation donnée.

Pour Vergnaud :

ce **sont les schèmes qui s'adaptent**, et **ils s'adaptent** aux **variables** et **contraintes posées dans les situations.**

Un schème se définit selon 4 composantes très liées entre elles

G. Vergnaud

Composantes à développer :

- Le(s) **but(s)** à atteindre, les sous-buts et anticipations
- Les **règles d'action** (= **prises de décision**), la planification et le contrôle
- Les **invariants opératoires** (= ce que **l'élève fait** et **comment il en parle**)
- Les inférences

Un schème se définit selon 4 composantes <u>très liées</u> entre elles

G. Vergnaud

Composantes à développer :

- Le(s) **but(s)** à atteindre, les sous-buts et anticipations
- Les **règles d'action** (= **prises de décision**), la planification et le contrôle
- Les **invariants opératoires** (= ce que **l'élève fait** et **comment il en parle**)
- Les inférences

MANIPULATION **VERBALISATION**

Un schème se définit selon 4 composantes très liées entre elles


G. Vergnaud

Composantes à développer :

- Le(s) **but(s)** à atteindre, les sous-buts et anticipations
- Les **règles d'action** (= **prise de décision**), la planification et le contrôle
- Les **invariants opératoires** (= ce que **l'élève fait** et **comment il en parle**)
- Les inférences

A retenir pour la suite :
but
règles d'action,
invariants opératoires

G. Vergnaud

Il s'agit donc :

➢ De **modifier les valeurs des variables didactiques** des problèmes pour provoquer cette adaptation.

Ce sont les schèmes qui s'adaptent

Il s'agit donc :

G. Vergnaud

- De **modifier les valeurs des variables didactiques** des problèmes pour provoquer cette adaptation.

- De **faire prendre conscience aux élèves** qu'une **procédure efficace** pour un ensemble de problèmes ne l'est plus lorsqu'on **modifie les caractéristiques des problèmes**

Ce sont les schèmes qui s'adaptent


G. Vergnaud

Il s'agit donc :

- De **modifier les valeurs des variables didactiques** des problèmes pour provoquer cette adaptation.

Par quels gestes professionnels ?

- De **faire prendre conscience aux élèves** qu'une **procédure efficace** pour un ensemble de problèmes ne l'est plus lorsqu'on **modifie les caractéristiques des problèmes**

SUR QUEL CRITÈRE prendre une décision ?

But à atteindre ?

Quelle est l'arrière-plan de la typologie de Vergnaud?

G. Vergnaud

Il s'agit d'amener les élèves à se **RE-**présenter une situation, à conceptualiser le réel

Mise en activité

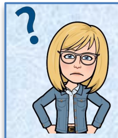
Q4: Quand peut-on dire que l'on a conceptualisé le réel ?

Question ouverte – 1 proposition

Quelle est l'arrière-plan de la typologie de Vergnaud?


G. Vergnaud

Il s'agit d'amener les élèves à se **re**présenter une situation, à conceptualiser le réel



Q4: Quand peut-on dire que l'on a conceptualisé le réel ?

On est capable de **conceptualiser** le réel quand on est capable de

relier une action à

- des conditions et des circonstances

Quelle est l'arrière-plan de la typologie de Vergnaud?


G. Vergnaud

Il s'agit d'amener les élèves à se **re**présenter une situation, à conceptualiser le réel

Quand peut-on dire que l'on a conceptualisé le réel ?

On est capable de **conceptualiser** le réel quand on est capable de

relier une action à

- des conditions et des circonstances

SI j'ai « telle **CONDITION, CONFIGURATION** » **ALORS** je peux « **ACTION** »

POUR obtenir « **CONSEQUENCE (BUT à ATTEINDRE)** »

Les CONDITIONS à identifier : Si j'ai … et … ALORS je peux ….


G. Vergnaud

Exemples de réussite

Exemples de problèmes additifs à une étape

- M. Durand entre dans un magasin où il achète une paire de chaussures à 87,55 euros. Il sort du magasin avec 24,25 euros. Avec combien d'argent M. Durand est-il entré dans le magasin ? *(Recherche d'un état initial)*
- M. Durand a 125 euros en poche. Il entre dans un magasin et s'achète une paire de chaussures à 87,55 euros. Avec combien d'argent ressort-il du magasin ? *(Recherche d'un état final)*
- M. Durand entre dans un magasin avec 150 euros en poche. Il s'achète une paire de chaussures puis il ressort avec 75,20 euros. Combien d'argent a-t-il dépensé ? *(Recherche de la transformation entre l'état final et l'état initial)*

Exemple 1

Les CONDITIONS à identifier : Si j'ai … et … ALORS je peux ….

- Mme Dupont possède des poules qui pondent 157 œufs par jour. Elle répartit les œufs dans des boîtes de 6. Combien de boîtes pourra-t-elle remplir chaque jour ?

Division quotition – BUT = recherche de la quantité de boites, connaissant leur valeur à l'unité

Si je connais la valeur totale d'une collection d'objet et la valeur d'**une** boite,

Alors je peux faire une division pour calculer le **nombre de boites** qu'il est possible de compléter

Exemple 2

Les CONDITIONS à identifier : Si j'ai … et … ALORS je peux ….

- . Les poules de Mme Dupont ont pondu 156 œufs. Elle les range dans 13 boites.
  Combien d'œufs met-elle dans une boite ?

Division partition – BUT = partager, recherche de la valeur d'une boite dans le cas d'un partage

Si je connais la valeur totale d'une collection d'objet et le nombre de boite,

Alors **je peux faire une division** pour calculer combien d'objets il est possible de mettre dans **une boite, une part**

Que retenir de l'arrière-plan de la typologie de Vergnaud?

Que retenir de l'arrière-plan de la typologie de Vergnaud?

Règles d'action

SI j'ai « telle **CONDITION**, **CONFIGURATION** » **ALORS** je peux « **ACTION** »

POUR obtenir « **CONSEQUENCE (BUT à ATTEINDRE)** »

Que retenir de l'arrière-plan de la typologie de Vergnaud?

Règles d'action

Invariants opératoires

SI j'ai « telle **CONDITION, CONFIGURATION** » **ALORS** je peux « **ACTION** »

POUR obtenir « **CONSEQUENCE (BUT à ATTEINDRE)** »

Pour amener les élèves à se **re-**présenter une situation, à conceptualiser le réel,

Rôle du PE: questionner les élèves, attirer leur attention sur le **but à atteindre**:

Que retenir de l'arrière-plan de la typologie de Vergnaud?

Règles d'action

Invariants opératoires

SI j'ai « telle **CONDITION, CONFIGURATION** » **ALORS** je peux « **ACTION** »

POUR obtenir « **CONSEQUENCE (BUT à ATTEINDRE)** »

Pour amener les élèves à se **re-**présenter une situation, à conceptualiser le réel,

Rôle du PE: questionner les élèves, attirer leur attention sur le **but à atteindre**:

- Que cherche-t-on ? Quel est le **but** à atteindre ?
- De quelles **données** a-t-on **besoin** ? Quelles sont les données qui manquent ?
- Quelles sont les **relations entre les données** ? Comment **manipuler, organiser** ces données ?

- Besoin d'une typologie pour faire le lien avec le **sens des opérations**

Comment organiser son enseignement ?

Programmation et progression :

- ✓ Les **types de problèmes** abordés sont précisés
- ✓ L'attention est posée sur le **BUT** de la recherche :

valeur de l'état initial

valeur de l'état final

valeur d'une partie

valeur de la transformation

valeur d'une comparaison

valeur d'une part

valeur du nombre de part

Comment organiser son enseignement ?

Programmation et progression :

- ✓ Les **types de problèmes** abordés sont précisés
- ✓ L'attention est posée sur le **BUT** de la recherche :

valeur de l'état initial

valeur de l'état final

valeur d'une partie

valeur de la transformation

valeur d'une comparaison

valeur d'une part

valeur du nombre de part

Cahiers des élèves :

- ✓ Permettent de garder la trace, la mémoire des problèmes étudiés

Programmation et progression :

- ✓ Les **types de problèmes** abordés sont précisés
- ✓ L'attention est posée sur le **BUT** de la recherche :

valeur de l'état initial

valeur de l'état final

valeur d'une partie

valeur de la transformation

valeur d'une comparaison

valeur d'une part

valeur du nombre de part

Cahiers des élèves :

- ✓ Permettent de garder la trace, la mémoire des problèmes étudiés

Référents :

- ✓ Problèmes de référence.

La résolution de problèmes (arithmétiques)

Quelles sont
les préconisations ?

Comment se développe la
mémoire des problèmes ?

Apprendre à se représenter un problème,
quels gestes professionnels ?

Apprendre à mettre en relation les
nombres,
un autre enjeu ?

Identifiez vos points forts ☺

Q5 : Quels gestes professionnels favorisent la compréhension et la RE-présentation d'un problème (par exemple multiplicatif, de proportionnalité) ?

Quels sont vos GP sur la phase de familiarisation, de présentation du problème ?

Question ouverte

Q5: Quels gestes professionnels favorisent la compréhension et la RE-présentation d'un problème ?

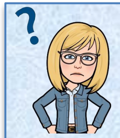
Lister les GP observables sur la phase de familiarisation, de présentation du problème ?

- ✓ Raconter le problème sans les nombres
- ✓ Raconter le problème sans la question
- ✓ Faire raconter le problème par les élèves
- ✓ Faire mimer le problème par les élèves :
  - ➢ se Re-présenter la situation dans l'espace réel (avec les élèves comme personnages)
  - ➢ Re-présenter la situation avec des figurines, des objets réels
- ✓ Amener les élèves à se Re-présenter mentalement le problème: demander aux élèves de fermer les yeux, de faire le film du problème dans leur tête.

Q6: Quels gestes professionnels favorisent la compréhension et la **RE**présentation d'un problème (par exemple multiplicatif, de proportionnalité ?)

Quels sont vos GP sur la phase de manipulation d'objets ?

Question ouverte



Q6: Quels gestes professionnels favorisent la compréhension et la REprésentation d'un problème ?

Lister les GP observables sur la phase de manipulation d'objets ?

- ✓ Faire mimer le problème par les élèves :
  - ➢ se Re-présenter la situation dans l'espace réel (avec les élèves comme personnages)
  - ➢ Re-présenter la situation avec des figurines, des objets réels
- ✓ Pour des problèmes « basiques » :
  - ➢ Re-présenter la situation avec des cubes, des barres cuisenaires : apprendre à manipuler
    - ➢ sans les nombres (j'ai des cubes dans une boite, j'en ajoute, j'en enlève, je répartis une quantité de cubes dans quatre boites, …)
    - ➢ puis avec les nombres (j'ai 3 cubes, tu en as deux de plus, deux de moins)
  - ➢ Puis avec la question : comment faire pour savoir combien j'ai de cubes ? Combien il reste de cubes? Combien tu as de cubes en plus ?

Identifiez vos points forts ☺

Q7: Quels gestes professionnels favorisent la compréhension et la REprésentation d'un problème ?

Quels sont vos GP sur la phase d'apprentissage de la schématisation ?

Question ouverte

Q7- Quels gestes professionnels favorisent la compréhension et la REprésentation d'un problème ?

Lister les GP observables sur la phase d'apprentissage de la schématisation ?

- ✓ Jouer sur la variable TEMPS - Créer le besoin de schématiser :
  - ➢ Différer le moment de poser la question. Comment garder en mémoire le problème ?
  - ➢ Créer un lien entre le matériel manipulé et les schémas
  - ➢ Comparer les schémas réalisés : formaliser la manière de schématiser.

✓ Le matériel reste présent pour valider ensuite

- ✓ Jouer sur la variable NOMBRE –
  - ➢ Créer l'impossibilité de manipuler, car les nombres sont trop grands
  - ➢ Créer le besoin de mettre en œuvre un autre moyen de représentation du problème.

Identifiez vos points forts ☺

Q8: Quels gestes professionnels lors de la synthèse, l'institutionnalisation ?

Quelles questions poser aux élèves ?

Question ouverte

Q8: Quels gestes professionnels lors de la synthèse, l'institutionnalisation ?
Quelles questions poser aux élèves ?

Question à poser aux élèves : *« Pourquoi faire une multiplication permet de réussir ? Pourquoi cette démarche convient ? »*

Proposer un contre-exemple: « moi, j'ai fait cette soustraction. Est-ce que ça convient? Pourquoi ? »

Le contre-exemple favorise

- ✓ la formulation d'éléments de justification de la part des élèves.
- ✓ La prise de conscience des raisons pour lesquelles une démarche ne convient pas.
- ✓ La mise en relation du but à atteindre, les règles d'actions et les invariants opératoires (au sens de Vergnaud)
    - ➢ Permet d'agir sur le développement des schèmes associés au type de problème proposé

Q8: Quels gestes professionnels lors de la synthèse, l'institutionnalisation ?
Quelles questions poser aux élèves ?

Ces gestes professionnels permettent **d'orienter l'attention sur les caractéristiques du problème**, sur le modèle mathématique sur lequel il repose :

Quels gestes professionnels lors de la synthèse, l'institutionnalisation ?
Quelles questions poser aux élèves ?

Ces gestes professionnels permettent **d'orienter l'attention sur les caractéristiques du problème**, sur le modèle mathématique sur lequel il repose :

On cherche la valeur du tout ?

On cherche la valeur d'une partie ?

On cherche la valeur initiale ?

On cherche la valeur d'une part ?

Quels gestes professionnels lors de la synthèse, l'institutionnalisation ?
Quelles questions poser aux élèves ?

Ces gestes professionnels permettent **d'orienter l'attention sur les caractéristiques du problème**, sur le modèle mathématique sur lequel il repose :

On cherche la valeur du tout ?

On cherche la valeur d'une partie ?

On cherche la valeur initiale ?

On cherche la valeur d'une part ?

Ils permettent de mettre en relation :

démarche

données que l'on a

structure du problème

donnée que l'on cherche

?

Quels gestes professionnels lors de la synthèse, l'institutionnalisation ?
Quelles questions poser aux élèves ?

Ces gestes professionnels permettent **d'orienter l'attention sur les caractéristiques du problème**, sur le modèle mathématique sur lequel il repose :

On cherche la valeur du tout ?

On cherche la valeur d'une partie ?

On cherche la valeur initiale ?

On cherche la valeur d'une part ?

Ils permettent de mettre en relation :

démarche

données que l'on a

structure du problème

donnée que l'on cherche

Ils favorisent la construction et la compréhension d'un **référent** en lien avec le **problème de référence**.

La résolution de problèmes (arithmétiques)

Quelles sont
les préconisations ?

Comment se développe la
mémoire des problèmes ?

Apprendre à se représenter un problème,
quels gestes professionnels ?

Apprendre à mettre en relation les
nombres,
un autre enjeu ?

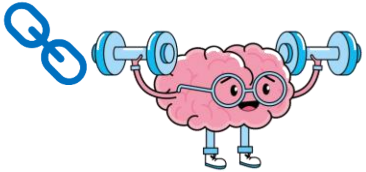
Des problèmes multiplicatifs aux problèmes de proportionnalité

*« Le **savoir** se forme à partir de **problèmes** à résoudre, c'est-à-dire de **situations à maitriser** […] ,*

*les **conceptions** des élèves sont **façonnées par** les **situations** qu'ils ont rencontrées.*

G. Vergnaud

Vergnaud



1/ Sur une carte, 1 cm représente 4 km dans la réalité. Trouver la distance dans la réalité d'un segment de 10 cm sur le plan.

1 cm	*4 km*
10 cm	*? km*

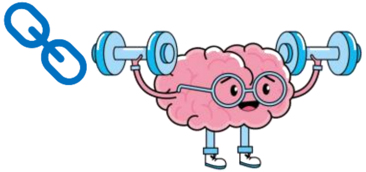
10 x 4

« Le ***savoir*** *se forme à partir de* ***problèmes*** *à résoudre, c'est-à-dire de* ***situations à maitriser*** *[…] ,*

les ***conceptions*** *des élèves sont* ***façonnées par*** *les* ***situations*** *qu'ils ont rencontrées.*

G. Vergnaud

Vergnaud



1/ Sur une carte, 1 cm représente 4 km dans la réalité. Trouver la distance dans la réalité d'un segment de 10 cm sur le plan.

1 cm	4 km
10 cm	? km

10 x 4

6/ Lors de son anniversaire, Robin achète 15 bouteilles de jus de fruit de 0,33 L chacune.
Une bouteille coûte 0,76 €.
Un des calculs ci-dessous permet de trouver le nombre total de litres de jus de fruit.
Lequel ?

Cocher la bonne réponse.

- ☐ 15 × 0,33 × 0,76
- ☐ 15 × 0,76
- ☐ 15 + 0,33 + 0,76
- ☐ 15 × 0,33

1 bouteille :	0,76€
15 bouteilles :	? €

15 x 0,76

Problème multiplicatif avec donnée de la valeur unité

Des problèmes multiplicatifs aux problèmes de proportionnalité

6 / Lors de son anniversaire, Robin achète 15 bouteilles de jus de fruit de 0,33 L chacune.
Une bouteille coûte 0,76 €.

Combien va-t-il payer ?

Problème multiplicatif qui relève de l'addition réitérée, on cherche la valeur totale

1 bouteille : 0,76 €
15 bouteilles : ? €

15 x 0,76

Procédure multiplicative

Règles d'action – prise de décision

SI j'ai « telle **CONDITION, CONFIGURATION** » **ALORS** je peux « **ACTION** »

POUR obtenir « **CONSEQUENCE (BUT à ATTEINDRE)** »

*« **Si** j'ai la valeur d'une grandeur à **l'unité**,*

***alors** je peux faire une multiplication **pour** trouver la valeur totale »*

Ce que l'élève fait

C'est vrai !
BUT à atteindre: calculer le prix total

Des problèmes multiplicatifs aux problèmes de proportionnalité

3 / Pour réaliser une mousse au chocolat pour quatre personnes, il faut 200 g de chocolat noir.
Quelle est la quantité de chocolat pour sept personnes ?

Résoudre ce problème.
Sur quoi s'appuie votre raisonnement ?

Des problèmes multiplicatifs aux problèmes de proportionnalité

3 / Pour réaliser une mousse au chocolat pour quatre personnes, il faut 200 g de chocolat noir.
Quelle est la quantité de chocolat pour sept personnes ?

4 personnes : 200 gr
7 personnes : ? gr

Problème multiplicatif qui relève de la proportionnalité

Il n'y a pas de relation entre 4 et 7, mais il y a une ***relation entre 4 et 200***
La moitié de 4 est 2. Pour 2 personnes, il faut 100 gr (la moitié de 200gr)
La moitié de 2 est 1. Pour 1 personne, il faut 50 gr (la moitié de 100gr)
Donc pour 7 personnes, il faut 7 x 50 = 350 gr de chocolat

Connaitre, trouver des relations entre les nombres

Procédure utilisant la propriété de linéarité multiplicative

3 / Pour réaliser une mousse au chocolat pour quatre personnes, il faut 200 g de chocolat noir.
Quelle est la quantité de chocolat pour sept personnes ?

4 personnes : 200 gr
7 personnes : ? gr

Problème multiplicatif qui relève de la proportionnalité

*Il n'y a pas de relation entre 4 et 7, mais il y a une **relation entre 4 et 200***
La moitié de 4 est 2. Pour 2 personnes, il faut 100 gr (la moitié de 200gr)
La moitié de 2 est 1. Pour 1 personne, il faut 50 gr (la moitié de 100gr)
Donc pour 7 personnes, il faut 7 x 50 = 350 gr de chocolat

Connaitre, trouver des relations entre les nombres

Procédure utilisant la propriété de linéarité multiplicative

Règles d'action – prise de décision

SI j'ai « telle **CONDITION, CONFIGURATION** » **ALORS** je peux « **ACTION** »

POUR obtenir « **CONSEQUENCE (BUT à ATTEINDRE)** »

*« **Si** j'ai deux grandeurs proportionnelles,*
alors** je peux passer de l'une à l'autre en multipliant par un **même nombre

Ce que l'élève fait

C'est vrai !
BUT à atteindre: calculer des valeurs proportionnelles

Des problèmes multiplicatifs aux problèmes de proportionnalité

8 / Dans une recette, pour faire un gâteau au chocolat pour 8 personnes, il faut 4 œufs.
Combien dois-je prévoir d'œufs pour 24 personnes ?

Résoudre ce problème.
Sur quoi s'appuie votre raisonnement ?

Des problèmes multiplicatifs aux problèmes de proportionnalité

8 / Dans une recette, pour faire un gâteau au chocolat pour 8 personnes, il faut 4 œufs.
Combien dois-je prévoir d'œufs pour 24 personnes ?

Problème multiplicatif qui relève de la proportionnalité

8 personnes : 4 œufs
24 personnes : ? œufs

$24 = 3 \times 8$
Il faut donc $3 \times 4 = 12$ œufs

Connaitre, trouver des relations entre les nombres

Procédure utilisant la propriété de linéarité multiplicative

8 / Dans une recette, pour faire un gâteau au chocolat pour 8 personnes, il faut 4 œufs.
Combien dois-je prévoir d'œufs pour 24 personnes ?

Problème multiplicatif qui relève de la proportionnalité

8 personnes : 4 œufs
24 personnes : ? œufs

24 = 3 x 8
Il faut donc 3 x 4 = 12 œufs

Connaitre, trouver des relations entre les nombres

Procédure utilisant la propriété de linéarité multiplicative

Règles d'action – prise de décision

SI j'ai « telle **CONDITION, CONFIGURATION** » **ALORS** je peux « **ACTION** »

POUR obtenir « **CONSEQUENCE (BUT à ATTEINDRE)** »

*« **Si** on multiplie par un nombre le nombre de personnes dans une recette,*
***alors** je multiplie d'autant la valeur d'une grandeur **pour** trouver sa valeur pour le nombre de parts demandé »*

Ce que l'élève fait

C'est vrai !
BUT à atteindre: calculer des valeurs proportionnelles

Amener les élèves à ARGUMENTER ET JUSTIFIER leurs réponses en s'appuyant sur les problèmes de référence enseignés

1/ Sur une carte, 1 cm représente 4 km dans la réalité.
Trouver la distance dans la réalité d'un segment de 10 cm sur le plan.

Cocher la bonne réponse.

☐ 0,4 km ☐ 400 km ☒ 40 km ☐ 4 km

5/ Dans la même boulangerie :

- 3 pains au chocolat coûtent 4,20 €.
- 2 pains au chocolat coûtent 2,80 €.

Parmi les opérations suivantes, une seule permet de trouver le prix de 5 pains au chocolat. Laquelle ?

Cocher la bonne réponse.

☐ 4,20 € + 2 €
☐ 4,20 € × 2,80 €
☒ 4,20 € + 2,80 €
☐ 4,20 € × 2 €

4/ Un rectangle a un périmètre de 500 m.
Sa longueur mesure 150 m.
Combien mesure sa largeur ?

La largeur vaut ☒ 100 ☐ 125 ☐ 200 ☐ 350 m.

Suite à une séquence d'apprentissage, mettre l'élève face à des QCM

- ✓ Raisonner
- ✓ Utiliser un brouillon pour se Re-présenter le problème, identifier des relations entre les nombres
- ✓ Cocher la bonne réponse
- ✓ Etre capable de **justifier** sa réponse

Conclusion

Merci pour votre attention